

LA DISPERSIÓ MØLLER I ELS INICIS DE L'ELECTRODINÀMICA QUÀNTICA¹

Xavier Roqué

Seminari d'Història de les Ciències

Universitat Autònoma de Barcelona

Edifici C, 08193 Bellaterra

Els primers intents d'elaborar una teoria quàntica i relativista de les interaccions electromagnètiques es remunten a mitjan anys vint, però només després de la segona guerra mundial, mitjançant el que tècnicament es coneix per *renormalització*, va rebre l'*electrodinàmica quàntica* una formulació coherent i satisfactòria. Durant el període anterior al 1947 la teoria s'enfrontà amb greus dificultats, que incloïen divergències en quantitats fonamentals, com ara l'energia pròpia de l'electró o la polarització del buit, així com el fracàs en l'aplicació a la radiació còsmica, un dels fenòmens més investigats durant les dècades de 1930 i 1940. Per a alguns dels seus creadors, aquestes dificultats presagiaven la imminència i la necessitat d'una revolució conceptual.

Al final del 1930 un jove físic danès, Christian Møller, va idear un mètode per tractar la col·lisió entre dos electrons relativistes. Durant els dos anys següents, Møller va treballar en la seva tesi doctoral, on analitzava teòricament, basant-se en el mètode, el pas d'electrons ràpids a través de la matèria. Com a cas particular, considerava la interacció entre dos electrons lliures, que avui coneixem per *dispersió Møller*, donant la fórmula que la descriu correctament en primera aproximació. Actualment, la fórmula de Møller representa un exemple paradigmàtic d'*aplicació i contrastació* de la teoria, i es dedueix fàcilment mitjançant les millores formals introduïdes després de la guerra. Però era també així en la seva etapa inicial, com s'ha

¹ Basat en un treball de recerca presentat al Seminari d'Història de les Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona, al maig del 1991. Agraïxo al professor Manuel G. Doncel que em suggerís d'estudiar la dispersió Møller, així com el seu ajut. El treball es beneficià dels comentaris d'Antoni Malet, Karl v. Meyenn, Luis Navarro i Anna Maria Oller. Pel permís per usar i citar material d'arxiu, estic agraït al Center for History of Physics del'American Institute of Physics, Nova York; a l'Arxiu Niels Bohr, Copenhaguen; als Master, Fellows i Scholars del St. John's College, Cambridge; i al Churchill Archives Centre, Churchill College, Cambridge. Agraïxo també el suport del Ministerio de Educación y Ciencia a través d'una Beca per a la Formació de Professorat i Personal Investigador, així com el de la DGICYT, programa de recerca n. PS88-0020. El tema està tractat de manera més completa al meu article "Møller scattering: a neglected application of quantum electrodynamics" (*Archive for History of Exact Sciences*, vol. 44, 1992, pp. 197-264).

suposat implícitament? Aquesta comunicació presenta els resultats d'una anàlisi històrica de la fórmula de Møller, i de la seva relació amb l'electrodinàmica quàntica.

L'estat provisional i poc satisfactori de la teoria en els seus inicis fa que ens preguntem en primer lloc: com va ser deduïda la fórmula de Møller? Amb quina intenció i en quin context va calcular Møller la dispersió entre dos electrons? I d'altra banda: es va intentar de contrastar la fórmula? Amb quina intenció i en quin context es van desenvolupar els experiments? Quina era la significació d'aquests experiments per a l'electrodinàmica quàntica anterior a la renormalització?

Com a conclusions principals, argumentaré que Møller va deduir la seva fórmula al marge de l'electrodinàmica quàntica, interessat per l'extensió relativista de l'anàlisi del pas de partícules carregades a través de la matèria, i també que pràcticament no s'intentà de contrastar la fórmula durant el període crític. D'aquesta manera, el tractament donat a la dispersió Møller abans de la renormalització fa necessari explicar com esdevingué aquest fenomen una aplicació exemplar de la teoria, i una de les seves bases experimentals.

1. L'INICI DE LA CARRERA CIENTÍFICA DE MØLLER

Christian Møller va néixer el 22 de desembre de 1904 a Hundslev, un poble de l'illa danesa d'Als. El 1923 ingressà a la Universitat de Copenhagen, i al setembre del 1926 va arribar per primera vegada a l'Institut de Física Teòrica de la Universitat. L'Institut havia estat inaugurat només cinc anys abans, però en aquest curt període de temps ja havia esdevingut, sota la direcció de Bohr, un dels centres més importants de la física teòrica. Møller va iniciar a l'Institut la seva activitat científica, i restà vinculat a la Universitat de Copenhagen durant la resta de la seva carrera.

Al maig del 1929 va aparèixer a *Zeitschrift für Physik* el primer article de Møller, "El fenomen de la desintegració radioactiva considerant la teoria de la relativitat" (MØLLER 1929). Amb el que *a posteriori* podem reconèixer com a tret característic dels seus primers treballs científics, Møller hi tractava d'incloure consideracions relativistes en un problema que ja havia estat considerat satisfactòriament segons la mecànica quàntica. Un any després, al maig del 1930, apareixia a la mateixa revista el seu segon article, on Møller aplicava el mètode d'aproximacions de Born a un problema de dispersió: "Teoria de la dispersió anòmala de partícules α en el seu pas a través d'elements lleugers" (MØLLER 1930a). En el seu següent article, completat a l'octubre del 1930, Møller ampliava l'estudi a ordres

d'aproximació superiors: "Sobre les aproximacions superiors del mètode de col·lisions de Born" (MØLLER 1930b).

2. EL MÈTODE DE MØLLER

El problema de la col·lisió entre dos electrons relativistes va ser l'objecte de l'únic article que Møller publicà el 1931. Møller hi presentava un mètode que permetia tractar la interacció entre dues partícules relativistes en primer ordre de teoria de pertorbacions, o primera aproximació de Born (MØLLER 1931). Un estudiant rus que visitava l'Institut, Lev Landau, havia suggerit a Møller la possibilitat de generalitzar relativísticament un mètode desenvolupat per Hans Bethe, per tractar segons la mecànica quàntica els fenòmens associats al pas de partícules ràpides a través de la matèria (BETHE 1930).²

El mètode de Møller es basava de manera essencial en tres fonaments teòrics ben diferenciats: el mètode de pertorbacions de Born, l'equació de Dirac, i el principi de correspondència. El *mètode de pertorbacions de Born*, introduït el 1926, és un mètode d'aproximació que permet de considerar des de la mecànica quàntica fenòmens aperiòdics, com ara col·lisions (BORN 1926). La teoria de col·lisions de Born va ser incorporada ràpidament a la teoria quàntica, i contribuï a significativament a estendre les seves aplicacions. El 1930, el seu ús no era problemàtic.

Els intents d'incloure la relativitat, fins i tot la relativitat general, en la mecànica quàntica, foren nombrosos durant el 1926 i el 1927. L'anomenada equació de Klein-Gordon, el més reeixit d'aquests intents, fracassà tanmateix en la seva aplicació a l'àtom d'hidrogen. Dirac va proposar al gener del 1928 una nova equació que, malgrat les dificultats d'interpretació, va impressionar per la senzillesa formal del seu plantejament, i per incloure l'espí de manera natural (DIRAC 1928a, b).³ L'*equació de Dirac* era de primer ordre i descrivia l'electró mitjançant funcions d'ona a quatre components. Møller assimilà ràpidament la nova teoria de Dirac, i l'aplicà ja al seu primer article. A finals del 1930 les dificultats d'interpretació de l'equació,

² Vegeu l'entrevista a Møller per Charles Weiner, 25 i 26 d'agost 1971 (Center for the History of Physics, American Institute of Physics).

³ Sobre l'equació de Dirac, vegeu KRAGH (1981). L'anàlisi més completa de l'obra i la personalitat de Dirac es troba a la seva biografia apareguda recentment, KRAGH (1990).

especialment de les seves solucions d'energia negativa, eren percebudes clarament, però l'èxit de les primeres aplicacions de l'equació i la seva "necessitat" formal feia que pocs físics en dubtessin seriosament.

El *principi de correspondència* constitueix l'element més subtil, i alhora el més característic, del treball de Møller. En la primera elaboració completa que en féu Bohr, el 1918, el principi era una regla heurística que permetia deduir les freqüències, les intensitats i la polarització de les línies espectrals basant-se en el moviment dels electrons en les seves òrbites. En aquesta forma el principi va tenir una importància cabdal en el desenvolupament de la teoria quàntica i en la creació de la nova mecànica quàntica (cfr. JAMMER 1966).

A finals del 1926, Klein va mostrar la significació del principi per la nova mecànica quàntica, en un article essencial al mètode de Møller (KLEIN 1927). En la versió de Klein, el principi esdevé un mètode per transposar quànticament expressions clàssiques. Les expressions mecànico-ondulatòries per les densitats de càrrega i corrent esdevenen el punt privilegiat de contacte entre les expressions clàssiques i les seves versions quàntiques. Aquesta transposició i avaluació en un marc conceptual diferent és caracteritzada en l'article de Klein per una paraula clau de difícil traducció, "korrespondenzmäßig", que ve a dir "segons el principi de correspondència".

Møller va seguir Klein en el seu ús del terme *korrespondenzmäßig* i en la generalització d'expressions quàntiques no relativistes a través de les densitats de càrrega i corrent. Però la relació crítica del mètode amb el principi de correspondència no és mai molt explícita. En l'article en què Møller presenta el mètode es parla només de "generalització analògica de la teoria de Born" (p. 787), o de "fer plausible" la generalització relativista. Møller cita l'article de Klein només per observar que el seu càlcul de la probabilitat de transició té "certa similitud" (p. 788) amb el mètode de Klein per avaluar la radiació emesa per un àtom. En l'article que contenia l'exposició més elaborada del mètode i la seva aplicació al càlcul del frenat d'electrons relativistes, Møller caracteritzava més explícitament el seu mètode de "korrespondenzmäßig", però només una vegada (MØLLER 1932, p. 533). En la resta de l'article continuava referint-se a generalitzacions plausibles o analògiques. L'aplicació del principi era exemplificada magistralment, però no s'aprofundia en la seva valoració.

Tanmateix, el recurs al principi de correspondència va ser aviat considerat com un dels elements característics del treball de Møller. Al setembre del 1931, L. Rosenfeld havia conclòs un tractament del problema relativista de diversos cossos

basant-se en el "principi de correspondència refinat de Heisenberg", i obtingué "una generalització del mètode emprat per Møller en el tractament relativista dels problemes de col·lisió, d'acord amb els resultats deduïts d'una altra manera per Breit" (ROSENFELD 1931, p. 253). A finals del 1931, R. J. Oppenheimer i J. F. Carlson van aplicar el mètode al càlcul de la col·lisió entre un electró d'alta energia i "la hipotètica partícula elemental neutra l'existència de la qual va ser suggerida temptativament per Pauli", referint-se al "neutró de Pauli" (OPPENHEIMER, CARLSON 1932).⁴ Quan a principis del 1932 Dirac va publicar la seva alternativa a l'electrodinàmica quàntica de Heisenberg-Pauli, el mètode es relacionava també de manera més explícita que en l'article de Møller amb el principi de correspondència. Encara que criticava la seva manca de generalitat, Dirac qualificava el mètode de Møller com "a definite advance in the relativistic theory of the interaction of two electrons" (DIRAC 1932, p. 455). El mètode, doncs, va ser acollit favorablement a pesar de les seves limitacions, i físics destacats van valorar-lo com una contribució significativa a l'anàlisi teòrica de la interacció entre dos electrons.

En què consisteix el mètode de Møller? En la teoria de Born, una col·lisió es descriu com la transició entre dos estats estacionaris del sistema total. En el cas de la col·lisió entre dues partícules es considera que ocupen inicialment certs estats estacionaris $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$, representats en la forma habitual mitjançant ones planes,

$$|\psi_1\rangle = a_1 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \omega_1 t)} = e^{-i\omega_1 t} |\varphi_1(\mathbf{r}_1)\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = e^{-i\omega_2 t} |\varphi_2(\mathbf{r}_2)\rangle$$

on $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ i $\omega = E/\hbar$. La interacció entre les partícules 1 i 2 determina la seva transició a certs estats estacionaris finals, $|\psi_1'\rangle$ i $|\psi_2'\rangle$, que es representen de manera anàloga als inicials. Segons la teoria de Born, la probabilitat que es produeixi aquesta transició ve donada, en primera aproximació, pel mòdul quadrat de l'element de matriu

$$\Phi = \langle \varphi_1', \varphi_2' | V(\mathbf{r}) | \varphi_1, \varphi_2 \rangle$$

on $V(\mathbf{r})$ és el potencial que descriu la interacció.

⁴ Els actuals neutró i neutrí no havien estat encara distingits clarament, i la partícula neutra proposada per Pauli (l'actual neutrí) explicava tant l'estadística del nucli com l'espectre β continu.

Bethe havia avaluat aquest element de matriu mitjançant el que aparentment només era una observació matemàtica enginyosa, però que suggeria una interpretació física interessant. L'element de matriu

$$\langle \varphi_1 | V | \varphi_1 \rangle$$

que, en la representació d'ones planes i en el cas d'interacció coulombiana, s'escriu explícitament

$$\int d^3 r_1 \frac{e}{|r_2 - r_1|} e^{i(k_1 - k_1) \cdot r_1}$$

pot ser interpretat com el potencial escalar $V'(r_2)$ creat per la distribució de càrrega

$$\rho = e \cdot e^{i(k_1 - k_1) \cdot r_1}$$

El potencial V' es pot ara calcular directament a partir del'equació de potencial, $\Delta V' = -4\pi\rho$, de solució general ben coneguda en termes de ρ , i es pot escriure

$$\Phi = \langle \varphi_2 | V' | \varphi_2 \rangle$$

que s'interpreta de forma evident com l'acció sobre la partícula 2 d'una pertorbació V' . D'aquesta manera, la interacció entre dues partícules és analitzada com la successió de dues transicions: el corrent associat a la transició "espontània" de la partícula 1 determina la transició de la partícula 2.

El mètode de Møller consisteix en la generalització relativista d'aquest argument, basant-se en el principi de correspondència. Els estats estacionaris que ocupen les partícules abans i després de la col·lisió són descrits novament mitjançant ones planes, però que ara són solucions de l'equació de Dirac,

$$\psi_1 = u(s_1) e^{i(k_1 \cdot r_1 - \omega_1 t)} = e^{-i\omega_1 t} \varphi_1(r_1),$$

$$\psi_2 = e^{-i\omega_2 t} \varphi_2(r_2).$$

Les amplituds $u(s)$ són "funcions d'ona a quatre components que determinen la

direcció de l'espí" (MØLLER 1931, p. 788). La noció de correspondència de Klein s'ha d'aplicar críticament per obtenir una expressió per la probabilitat de transició. Møller parteix de les densitats de càrrega i corrent associades a la transició de la partícula 1 segons la teoria de Dirac,

$$\rho = -e_1 \psi_1^\dagger \cdot \psi_1,$$

$$\mathbf{j} = e_1 \psi_1^\dagger \cdot \vec{\alpha}^{(1)} \psi_1.$$

Els potencials associats a aquestes densitats poden determinar-se directament a partir de l'expressió general pels potencials creats per una distribució de càrrega i corrent (potencials de Liénard-Wiechert), i ser tractats com una pertorbació que actua sobre la partícula 2. Aquesta partícula satisfà aleshores segons Dirac l'equació

$$(i\hbar \partial/\partial t - ic\hbar \vec{\alpha}^{(2)} \cdot \vec{\nabla} + \beta m_2 c^2) \psi_2 = -e_2 (\phi + \vec{\alpha}^{(2)} \cdot \mathbf{A}) \psi_2$$

La probabilitat que es produeixi una transició $(1,2) \rightarrow (1',2')$ en la unitat de temps ve donada aleshores per

$$P(1,2 \rightarrow 1',2') = (4\pi^2/\hbar) |\Phi|^2 \delta(E_1 + E_2 - E_{1'} - E_{2'}),$$

on

$$\Phi = \langle \varphi_{2'} | U(\mathbf{r}_2) | \varphi_2 \rangle = \int \varphi_{2'}^\dagger U(\mathbf{r}_2) \varphi_2 d^3 r_2,$$

i $U(\mathbf{r}_2)$ és la *part espacial* de la funció pertorbativa, $-e_2(\phi + \vec{\alpha}^{(2)} \cdot \mathbf{A})$.

Tenint en compte la representació en forma d'ones planes, l'element de matriu s'escriu

$$\Phi = \frac{e_1 e_2 \hbar^2}{\pi} \int \varphi_{2'}^\dagger \frac{u_{1'}^\dagger u_1 \vec{\alpha}^{(2)} \cdot (u_{1'}^\dagger \vec{\alpha}^{(1)} u_1)}{(p_1 - p_{1'})^2} e^{i(k_1 - k_{1'}) \cdot \mathbf{r}_2} \varphi_2 d^3 r_2 \quad (1)$$

i considerant la definició de la funció delta s'obté finalment⁵

$$\Phi = \frac{e_1 e_2 h^2}{\pi} \frac{u_2^+ \mu_2 u_1^+ \mu_1 - (u_2^+ \vec{\alpha}^{(2)} u_2) \cdot (u_1^+ \vec{\alpha}^{(1)} u_1)}{(p_1 - p_1')^2} h^3 \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \quad (2)$$

Aquesta expressió descriu ja essencialment la interacció. Møller es complau en reconèixer-ne directament la invariància relativista i la simetria, especialment satisfactòria atesa la asimetria del mètode. Discuteix després el significat dels diferents termes i la relació amb tractaments anteriors del mateix problema. L'intent més important de trobar una expressió per a la interacció entre dos electrons basant-se en l'equació de Dirac, anterior al de Møller, el representa l'equació de Breit. Gregory Breit va dedicar diversos treballs a l'anàlisi de la interacció entre dos electrons entre el 1929 i el 1932. Durant una estada de recerca a Europa, Breit fou introduït per Pauli en el problema de la interacció entre dos electrons, que ell i Heisenberg havien estat considerant recentment en el context dels seus intents de quantitzar el camp electromagnètic. Breit va completar la seva anàlisi als Estats Units, proposant "una equació d'ona aproximada que té en compte termes d'ordre $(v/c)^2$ en la interacció entre dos electrons" (BREIT 1929). L'anàlisi de Breit es basava en un model clàssic de la interacció entre els electrons, i superava tractaments anteriors perquè incloïa l'efecte del retardament. L'aspecte més innovador de l'equació de Breit, però, era que podia deduir-se de "la nova teoria de Heisenberg i Pauli dels camps d'ona", fins a termes de primer ordre en la interacció de Coulomb (HEISENBERG, PAULI 1929, 1930). L'electrodinàmica quàntica de Heisenberg i Pauli era el tractament més general i fonamental que havia rebut la teoria, i Breit era inicialment optimista respecte a les

⁵ Introduïnt la notació γ^μ , amb $\gamma_0 = \beta$ i $\vec{\gamma} = \gamma^0 \vec{\alpha}$, i observant que $u_1' \cdot u_1 = u_1' \cdot \gamma_0 u_1$ i que $u_1' \cdot \vec{\alpha}^{(1)} u_1 = u_1' \cdot \vec{\gamma} u_1$, el terme intermedi és

$$\frac{u_2^- \cdot \gamma^\mu u_2 u_1^- \cdot \gamma_\mu u_1}{(p_1' - p_1)^2}$$

el mateix que escriuríem avui directament per la interacció entre dues partícules de Dirac *distingibles*, com Møller ha considerat les seves partícules.

possibilitats de la seva equació. Amb el temps aquesta confiança va anar minvant, i el 1932, en un article sobre "Quantum theory of dispersion" per a *Review of Modern Physics*, Breit expressava amb claredat el seu desencís, després d'haver recomanat el mètode de correspondència de Klein per la seva simplicitat i eficàcia: "*The interaction between two particles can also be treated according to (Heisenberg and Pauli's) quantum electrodynamics, and it is possible to explain by this means the interactions of the electron spins of two particles as well as the orbital and orbit spin interactions. It should be remembered, however, that the divergence difficulties of the theory make it impossible, according to Oppenheimer, to arrive at a unique interpretation of the results*" (BREIT 1933, p. 131; BREIT 1932). L'intent frustrat de Breit fa ressaltar les particularitats del tractament de Møller, i mostra que la formulació més general que havia rebut l'electrodinàmica quàntica no era capaç de resoldre satisfactòriament el problema de dos electrons.

En el seu article del 1931, Møller observava que el càlcul de la secció eficaç es podia desenvolupar exactament, però donava en general expressions molt complicades. Per això es limitava a la consideració dels casos límit no relativista i ultrarelativista. Al final de l'article, considerava la possibilitat de comprovar experimentalment la secció eficaç ultrarelativista. Møller observava que aquest cas extrem no es podia assolir mitjançant electrons accelerats artificialment, però "hauria de donar-se en els electrons produïts per l'aurora boreal, i en els raigs corpusculars que acompanyen la radiació còsmica. La fórmula [ultrarelativista] seria, doncs, aplicable al càlcul del frenat i la dispersió [de la radiació còsmica], sobre el qual espero tornar més endavant" (MØLLER 1931, p. 795).

3. LA FÓRMULA DE MØLLER

El càlcul del frenat seria per a Møller l'objectiu més important del seu treball durant els mesos següents, com reflecteixen les nombroses referències a aquest problema en la seva correspondència. La qüestió del frenat s'havia revelat des de principis de segle com una qüestió central per a l'anàlisi de les radiacions radioactives, i cap al 1930 era evident l'interès d'un càlcul relativista que pogués contribuir a precisar la naturalesa de les partícules còsmiques. L'aplicabilitat dels seus resultats a la radiació còsmica va ser per a Møller, en el moment d'iniciar l'estudi que formaria la seva tesi, un estímul decisiu. Però la rellevància d'aquest aspecte del seu treball va disminuir progressivament a mesura que avançava en els seus càlculs, que Møller concentrà finalment de manera exclusiva en la radiació β .

A finals de l'estiu del 1931, Møller va començar a treballar en l'aplicació del seu mètode al càlcul del frenat d'electrons relativistes. El 30 de setembre, en escriure a Bethe enviant-li una separata de l'article que acabava de publicar, i demant-li'n una del treball de Bethe sobre el frenat de partícules ràpides, Møller li explicava que "ara voldria intentar de calcular segons el mateix mètode el frenat de partícules extremadament ràpides (radiació β , radiació d'altura)".⁶

Dues setmanes després, el 14 d'octubre, Møller va rebre una carta sense signar procedent de Cambridge. L'autor era F. Clive Champion, un estudiant de doctorat que treballava en una tesi experimental sobre la radiació β , que havia llegit el darrer article de Møller i s'interessava per la fórmula general de dispersió. Per aquesta primera carta, que va quedar sense resposta, sabem indirectament que Møller ja havia avançat "un bon tros" ("*ein gutes Stück*") en els seus càlculs, com va explicar a Max Delbrück en preguntar-li pel remitent desconegut. Els comentaris que seguien feien referència exclusivament al frenat, la qüestió que més preocupava Møller.

El 2 de novembre Champion va tornar a escriure a Møller, però aquest cop va signar la carta i Møller va poder respondre-li el 4 de novembre. Møller, que s'interessà vivament pel treball de Champion, era optimista respecte a l'estat dels càlculs, i li comunicava que esperava poder enviar-li la fórmula general "in a short time" ---un mes, com veurem---. Champion, però, no va ser l'únic en interessar-se pel treball de Møller. A finals de novembre, Møller va rebre una carta de Heisenberg, les crítiques i suggerències del qual serien decisives per al seu èxit final.

Heisenberg, que coneixia bé Møller per les seves estades freqüents a Copenhaguen, preparava en aquells moments un article sobre l'adequació del coneixement teòric de la radiació còsmica a les dades experimentals. En la seva carta, Heisenberg exposava a Møller el seu escepticisme sobre l'aplicació dels seus càlculs al frenat d'electrons relativistes. Møller va replicar a Heisenberg el 4 de desembre, amb una primera versió equivocada de la fórmula general de dispersió. La còpia microfilmada de la carta de Møller no conté fórmules, però no pot tractar-se sinó de la mateixa expressió que Møller comunicà també a Champion tres dies després, el 7 de desembre. Un esbrossament manuscrit que es conserva d'aquesta carta sí que conté la versió més primitiva de la secció eficaç diferencial de la dispersió Møller, bastant més complicada que la correcta, però que es reduïa als límits que Møller havia calculat

⁶ Tota la correspondència de Møller citada a continuació es troba als Archives for the History of Quantum Physics, microfilm no. 59.

anteriorment.

En les cartes a Heisenberg i Champion hi havia també les relacions entre els angles de dispersió als sistemes centre de masses i laboratori, θ_{cm} i θ , que Møller havia usat. Les relacions no eren correctes, com Heisenberg va fer notar en la resposta que envià a Møller el 10 de desembre, alhora que aportava nous arguments en contra de la validesa de la fórmula general, basant-se en les seves implicacions per la radiació d'altura. Aquestes consideracions negatives, que venien a afegir-se a les que ja havien expressat Delbrück i el mateix Møller anteriorment, van decidir Møller a deixar de costat la radiació còsmica. Les notícies que simultàniament li arribaven del Cavendish relatives a la possible comprovació de la seva fórmula mitjançant els raigs β , van fer que reconsiderés la importància d'aquesta radiació. Ambdós aspectes són expressats clarament en la resposta de Møller a la carta de Heisenberg, i permeten situar a mitjan desembre del 1931 la reorientació final de les seves investigacions.

A la mateixa carta Møller deia de l'error a les relacions $\theta_{cm} - \theta$ que es tractava només d'una errata que no variava res a la fórmula de dispersió. Però Heisenberg va detectar-hi un altre error, que possiblement induí Møller a revisar els complicats càlculs, i el conduí finalment a la fórmula de dispersió correcta. Heisenberg havia trobat l'error a partir de consideracions de simetria, i el comunicà a Møller el 17 de desembre. Després d'aquestes cartes, es perd el fil fins el 25 de gener, quan Møller va escriure a N. Mott i Champion comunicant-los la fórmula de dispersió correcta. Les vacances de Nadal havien representat un llarg parèntesi en el seu treball, com dóna a entendre la carta a Mott del 25 de gener. Possiblement, Møller va refer els seus càlculs en tornar de vacances, a mitjan gener, i obtingué la fórmula de dispersió correcta poc abans del dia 25:

$$d Q (\theta) = \frac{e^4 \sin \theta_{cm} d \theta_{cm} d \varphi 8 (\gamma + 1)}{m^2 \gamma^4 v^4 [(\gamma + 3)^2 - (\gamma - 1)^2 \cos^2 \theta_{cm}]} F$$

$$F = 2 \gamma^2 (\gamma + 1) \left(\frac{4}{\sin^4 \theta_{cm}} - \frac{3}{\sin^2 \theta_{cm}} \right)$$

$$+ \frac{(\gamma-1)^2}{4} \left(\frac{4 [1+(\gamma+1)^2]}{\sin^2\theta_{cm}} + 3 - 2\gamma^2 \right) + \frac{(\gamma-1)^4}{16} \sin^2\theta_{cm} .$$

No sabem res del desenvolupament posterior del treball de Møller. La redacció de l'extens article en què exposava els seus resultats devia ocupar-lo intensament fins a finals d'abril; l'article va ser rebut el 3 de maig als *Annalen der Physik*. Amb l'addició d'un resum en danès del seu contingut, l'article esdevingué la tesi de Møller. És molt significatiu que Møller titulés aquest prefaci de 20 pàgines "Visió de conjunt sobre la teoria i comparació amb els experiments", quan en l'article que introduïa les referències a experiments eren molt escasses. Sensdubte, això va ser degut al contacte amb Champion, que havia completat els seus experiments el juny.

L'article que formava el nucli de la tesi de Møller contenia, segons el seu títol, una "teoria del pas d'electrons ràpids a través de la matèria" (MØLLER 1932). L'ambigüitat del títol, que parla genèricament d'electrons ràpids, es resol a la primera frase, on aquests electrons són identificats amb la radiació β . Les referències a la radiació còsmica, constants durant l'elaboració de l'article, han desaparegut completament en la seva versió final. Per a Møller, la manca d'una "teoria general conseqüent del problema relativista de diversos cossos" -és a dir, d'una electrodinàmica quàntica lliure de divergències- fa necessari tractar *provisionalment* el problema de manera aproximada. Encara que Møller no presenta el seu mètode com a alternativa als intents realitzats de quantificar el camp electromagnètic, tampoc no els esmenta.

En el primer apartat del seu article, Møller presenta el seu mètode de manera més extensa i completa que en l'article anterior, però continua sense incloure cap reflexió sobre la base conceptual del mètode. Després de tractar, als apartats segon i tercer, l'excitació dels nivells atòmics inferiors, Møller considera al quart apartat l'excitació dels superiors, i el cas límit en què l'energia impartida per l'electró incident a l'electró atòmic és molt més gran que l'energia d'ionització. Aquest cas és el que pot ser considerat com una interacció entre electrons lliures, i és en aquest apartat que Møller exposa el càlcul de la secció eficaç. Tanmateix, la fórmula no ocupa, en l'article de Møller, un lloc destacat. Un cop deduïda, Møller la utilitza, junt amb els resultats dels paràgrafs anteriors, per calcular el frenat. Tota valoració del mètode que ha emprat, o de la fórmula de dispersió que ha obtingut, la limita Møller

a la breu introducció, on els judicis de valor són escassos i no inclouen cap esmenta l'electrodinàmica quàntica.

Møller va elaborar el seu tractament de la interacció entre dos electrons sobre bases teòriques de fiabilitat contrastada, evitant la consideració dels greus problemes que afectaven la teoria quàntica del camp electromagnètic. Però la relació entre la fórmula de Møller i l'electrodinàmica quàntica no només era més directa del que la indiferència de Møller feia suposar, sinó que va ser posada de manifest molt poc després que Møller completés el segon i definitiu article sobre la dispersió d'electrons. Aquest article havia estat rebut als *Annalen der Physik* el 3 de maig. Poc més d'un mes després, el 9 de juny, es rebia a *Zeitschrift für Physik* un article de Bethe i Fermi, "Sobre la interacció entre dos electrons", on es discutia "les relacions entre les fórmules d'interacció de Breit, Møller i l'electrodinàmica quàntica" (BETHE, FERMI 1932). L'electrodinàmica quàntica de l'article de Bethe i Fermi era naturalment la de Fermi, que l'havia formulat de manera més entenedora que Dirac, o Heisenberg i Pauli (FERMI 1932). L'article mostrava amb concisió i claredat que el tractament de Møller era plenament compatible amb la teoria.

Malgrat això, la fórmula de Møller va rebre escassa atenció en els escassos textos dedicats a l'electrodinàmica quàntica abans de la guerra. Al conegut article de Pauli per a la segona edició del *Handbuch der Physik*, només se cita el treball de Møller a la darrera pàgina, en una nota a l'afirmació que "el fet que l'energia pròpia [de l'electró] resulti infinita segons la teoria, impedeix també un tractament relativista conseqüent del problema de diversos cossos" (PAULI 1933, p. 272). La preponderància del camp de radiació a una de les primeres referències obligades de la nova teoria, *The quantum theory of radiation* de Heitler, n'excloïa la fórmula de Møller a la primera i segona edicions (HEITLER 1936, 1944); significativament, aquest no era el cas de la tercera (HEITLER 1954). El treball de Møller també era absent en un altre text molt representatiu, la *Introducció a la teoria quàntica de camps* de Wentzel (WENTZEL 1943). La *Teoria quàntica de l'electró i la radiació* de Kramers citava només l'article de presentació del mètode de MØLLER (1931) en una nota, com a exemple de "com en el cas d'interacció *feble* entre electrons ràpids es pot calcular de manera rigorosament relativista" (KRAMERS 1938, p. 301).

La situació després de la guerra és molt diferent. En el que possiblement representa el primer tractament sistemàtic de la teoria, *The Theory of Photons and Electrons* de Jauch i Rohrlich, es dedica ja un capítol al sistema electró-electró, i hi figura en lloc prominent el "Møller scattering" (JAUCH, ROHRLICH 1955, capítol 12). La col·lisió entre dos electrons hi és considerada com un procés fonamental

d'interès en si mateix. El problema s'introdueix d'una manera lògica i general molt allunyada de les introduccions fenomenològiques anteriors. En aquest sentit, aquesta presentació marca la pauta de la majoria de les presentacions posteriors de la "dispersió Møller", des de textos poc posteriors al de Jauch i Rohrlich, com la "Electrodinàmica quàntica" de KÄLLÉN (1958), fins als més recents.⁷

Aquesta mostra incompleta de referències és suficient per constatar que l'electrodinàmica quàntica renormalitzada revaloritza la fórmula de Møller. A continuació veiem que aquest canvi no va afectar només la valoració de la fórmula des del punt de vista teòric, sinó també la importància de la seva contrastació experimental.

4. LA CONTRASTACIÓ EXPERIMENTAL DE LA FÓRMULA DE MØLLER

Els experiments d'Ashkin, Page i Woodward publicats el 1954 són sovint citats com els més decisius dels experiments realitzats després de la guerra per contrastar la fórmula de Møller (ASHKIN, PAGE, WOODWARD 1954). En aquells moments l'electrodinàmica quàntica havia resolt brillantment els problemes de les seves primeres formulacions, i l'aproximació de Feynman a la teoria havia donat nova rellevància a la interacció Møller. Això podria explicar el renovat interès en la fórmula al voltant del 1950, quan alguns dels nous acceleradors construïts després de la guerra van ser aplicats a distingir clarament la fórmula de Møller d'altres expressions per a la interacció entre dos electrons.

Aquest interès contrasta marcadament amb la indiferència dels experimentadors cap a la fórmula durant l'etapa inicial de la teoria. Juntament amb els d'Ashkin, Page i Woodward, se citen també sovint els experiments que el físic anglès F. C. Champion va realitzar el 1932. Els experiments de Champion, però, no només van ser concebuts quan encara no existia la fórmula, sinó que, fins on sabem, van ser els únics realitzats en la dècada del 1930 per contrastar la fórmula de Møller.

Mentre Møller treballava en la seva tesi, la possible comprovació dels seus resultats no el preocupava gaire. És possible, com va assenyalar en una entrevista el 1971 (nota 2), que Møller dubtés de la significació dels seus càlculs. Però la seva actitud no era injustificada: els experiments sobre la dispersió d'electrons relativistes

⁷ Per posar només un exemple, ITZYKSON, ZUBER (1985).

eren aleshores escassos i poc decisius. Encara que la cambra de boira permetia obviar la majoria de les dificultats associades a la manipulació experimental de la radiació β , cap el 1930, una veu significativa no podia sinó reconèixer que "els experiments sobre la dispersió de raigs β deixen molt per desitjar" (RUTHERFORD, CHADWICK, ELLIS 1930, p. 215).

Aquesta situació no havia canviat substancialment quan el 14 de octubre de 1931 Møller va rebre una carta procedent del laboratori Cavendish, datada el 10 d'octubre. El remitent, que s'havia descuidat de signar-la, li comunicava que havia llegit amb molt d'interès el seu article recent (referint-se a Møller 1931), però observava que només s'hi donaven els casos límit de la fórmula de dispersió. El desconegut explicava que havia pres recentment "un gran nombre de fotografies de traces de raigs β ràpids en una cambra d'expansió automàtica", i que ja havia començat a analitzar "les col.lisions amb electrons estacionaris". L'autor afegia que esperava completar l'anàlisi al març de l'any següent, i que estava "molt ansiós" per saber com diferiria la distribució de punts de la predita per a l'expressió clàssica.

Naturalment, el contingut de la carta va interessar molt a Møller, que el mateix dia va escriure a Max Delbrück preguntant-li qui fotografiava traces de raigs β ràpids mitjançant una cambra d'expansió al Cavendish. Delbrück suggerí com a remitent a un jove alumne italià de Blackett de qui aquest li havia parlat, referint-se molt probablement a Giuseppe Occhialini. Però l'autor de la carta no era Occhialini, sinó un altre jove doctorand del Cavendish, F. C. Champion.

Frank Clive Champion s'incorporà al Cavendish al juliol del 1929, on el seu treball s'orientà des d'un primer moment a l'ús de la cambra de boira en la investigació de les radiacions α i β .⁸ A finals dels anys vint, l'aparell era àmpliament usat al Cavendish, on hi havia diversos experts en la seva construcció, entre ells Patrick Blackett, "the leading exponent of cloud chambers in the world" (HENDRY 1984, p. 22). Durant l'estiu del 1929 Champion es familiaritzà amb un model de cambra dissenyat recentment per Blackett, i durant el seu primer trimestre al Cavendish treballà en la seva adaptació a la investigació de la radiació β . L'adaptació ocupà gran part del curs 1930--1931, després que Champion hagués suspès

⁸ Al College de Champion, St. John's, es conserva una nota biogràfica que conté el seu obituari a *The Times*, 5 de març de 1976. S'hi conserva també una "tutorial file" (CTF) amb una cinquantena de documents, principalment correspondència administrativa, però entre els que hi figuren també dos informes de recerca i material relatiu a una petició de beca el 1934. Agraïxo al senyor M. G. Underwood, arxiver del St. John's College, aquesta informació.

temporalment el seu treball durant els primers mesos del 1930. Al maig del 1931 Champion disposava només d'unes 3.000 traces (aproximadament 400 fotografies), una dècima part de les necessàries segons les seves estimacions. Si bé Champion era conscient de la necessitat de prendre un gran nombre de fotografies per donar fiabilitat al mètode estadístic d'anàlisi que es proposava utilitzar, en el moment d'iniciar els seus experiments no tenia una idea molt definida dels resultats teòrics que volia comprovar. Quan al maig del 1931, després de gairebé dos anys de treball al Cavendish, Champion va redactar un segon informe sobre els seus resultats i el seu pla de treball, les seves intencions eren més clares. Però en el seu informe de recerca, Champion exagerava els defectes de les teories de dispersió, justificant el seu interès genuí pel problema, al marge de tota consideració teòrica.⁹

Quan va escriure per primer cop a Møller, Champion ja disposava de la majoria de les fotografies que utilitzà per contrastar la fórmula, i dedicà els mesos següents a la seva anàlisi. El 2 de novembre, impacient per no haver rebut cap resposta, Champion va tornar a escriure a Møller, oferint-se a enviar-li alguns resultats més que havia obtingut des que la carta anterior havia estat escrita. Champion qualificava més precisament aquesta vegada el seu treball com "an experimental test of your formula for the scattering". El 8 de novembre, havent rebut finalment una resposta de Møller, Champion li va escriure donant-li alguns detalls de la disposició experimental que havia usat. La cambra contenia nitrogen, i les col·lisions es produïen entre les partícules β i els electrons "en la estructura extra-nuclear de l'àtom de nitrogen". Champion analitzava en aquests moments les seves fotografies com a contrastació directa de la conservació del moment i l'energia en les col·lisions, i dels principis de la mecànica relativista. L'article resultant, "On some close collisions of fast β -particles with electrons, photographed by the expansion method", estava completat a mitjan febrer del 1932 (CHAMPION 1932a).

Champion analitzava alhora les mateixes fotografies amb la intenció de contrastar la fórmula de Møller. En la seva primera carta a Møller incloïa ja algunes dades, 50 punts en un diagrama θ (angle de dispersió) - $\beta(v/c)$. El mateix diagrama, ampliat a 250 punts, esdevingué la primera figura del següent article de Champion, "The scattering of fast β -particles by electrons", acabat al mes de juny del 1932, quan la fórmula de Møller no havia estat publicada encara. En les traces aptes per a la mesura, que totalitzaven uns 650 m, Champion va observar 250 col·lisions amb angles de dispersió superiors a 10° , amb valors de $\beta = v/c$ per la partícula incident compresos

⁹ "Research Report 1929-1930", "Research Report 1930-1931" (CTF).

entre 0'8 i 0'9. Els resultats de Champion estaven en bon acord amb la fórmula de Møller, però per angles superiors a 20° les fórmules no relativistes corregides eren també satisfactòries (CHAMPION 1932b).

Els experiments de Champion van ser concebuts quan la fórmula de Møller encara no existia. Champion tenia la intenció d'estudiar experimentalment la interacció entre dos electrons, però dins d'un context general d'anàlisi de la radiació β . Els seus experiments només podien haver afectat indirectament i de manera totalment inconscient l'electrodinàmica quàntica. Però no només Champion desconeixia part de les implicacions del seu treball. Quan el 1934 J. Cockcroft i P. Blackett van informar sobre el treball de Champion, que aspirava al càrrec de "Lecturer" al King's College de Londres, cap dels dos no esmentava la comprovació de la fórmula de Møller entre els seus mèrits.¹⁰

Després dels experiments de Champion, no es donaria un altre intent de contrastar la fórmula de Møller fins el 1941.¹¹ A l'abril del 1941 George Hornbeck i Irl Howel van publicar els resultats de la primera d'aquestes anàlisis. Els seus experiments estaven motivats per les discrepàncies en les dades experimentals existents. El seus resultats complementaven els obtinguts per Champion en l'àmbit d'energies primàries de 0'4 a 0'9 MeV. "Both investigations", conclouïen, "support each other in demonstrating the essential correctness of Møller's theory of secondary energy distribution in the domain of primary energy from 0'4 to 2'6 MeV" (HORNBECK, HOWELL 1941, p. 51).

Al febrer del 1942 apareixia un treball de Paul E. Shearin i T. Eugene Pardue, de la mateixa Universitat, que complementava el de Hornbeck i Howell. Shearin i Pardue havien millorat l'acord entre les observacions experimentals i la fórmula de Møller modificant els criteris de selecció de traces i mesurant més

¹⁰ "Report by Dr Cockcroft on the dissertation of F. C. Champion", i "Report by Professor P. M.S. Blackett on the dissertation of F. C. Champion" (CTF). Champion es doctorà a l'estiu del 1932, i deixà el Cavendish per incorporar-se com a "assistant Lecturer" al University College de Nottingham, on va continuar l'anàlisi de les seves fotografies, que no completaria fins el 1935. Després del seu interès inicial per la física atòmica i nuclear, la carrera de Champion s'orientà cap a l'estat sòlid. Champion va viure a Espanya des que es va retirar, el 1970, fins a la seva mort a Màlaga el 1976 (cfr. "Obituary. Professor Champion. Noted physicist" *The Times*, 5 març 1976, p. 17).

¹¹ El 1933, E. J. Williams i Cameron van analitzar la dispersió de partícules β procedents del Ra E, però finalment no van publicar els seus resultats.

acuradament els rangs. Com mostraven els seus resultats, "the Møller formula is essentially correct for the primary and secondary energy ranges considered here" (SHEARIN, PARDUE 1942, p. 243).

És molt possible que no hi hagués més contrastacions de la fórmula fins el 1950, quan un equip del Institute for Nuclear Studies de la Universitat de Chicago va publicar una anàlisi de 98 col·lisions electró-electró (GROETZINGER, LEDER, RIBE, BERGER 1950). A l'article es comparaven la teoria de Møller, versions relativistes de les teories de Mott i Rutherford, i la teoria clàssica de Rutherford, amb resultats poc conclusius. A partir d'aquest moment es constata fàcilment un increment de l'interès per la dispersió electró-electró. El 1951 un grup de la Universitat d'Illinois l'analitza utilitzant un feix monocinètic d'electrons de 15'7 MeV, procedents d'un bevatró de 22 MeV (SCOTT, HANSON, LYMAN 1951). A finals del mateix any, un equip del Radiation Laboratory de Berkeley considera aquesta interacció a altes energies, mitjançant electrons de 200 MeV procedents del sincrotó de Berkeley (BARKAS, DEUTSCH, GILBERT, VIOLET 1952). Al Microwave Laboratory de la Universitat de Stanford, un altre grup de físics experimentals estudia la dispersió d'electrons de 6'1 MeV procedents d'un accelerador lineal (BARBER, BECKER, CHU 1953). Aquesta sèrie d'experiments culmina a l'abril del 1954 amb la publicació de l'article considerat més decisiu, on es comprova la validesa de la fórmula de Møller en l'interval d'energies de 0'6 a 1'2 MeV (ASHKIN, PAGE, WOODWARD 1954). La llista, que no vol ser exhaustiva, mostra suficientment el que hem indicat. En cap dels articles citats no es relaciona directament la fórmula de Møller amb l'electrodinàmica quàntica. En tots ells la fórmula és considerada com la més satisfactòria teòricament, però no se n'indiquen les raons. La caracterització més precisa que es fa de la fórmula és que es basa en la teoria de Dirac.

Els experiments decisius s'havien desenvolupat en un dels nous laboratoris creats després de la guerra, el Laboratory of Nuclear Studies de la Universitat de Cornell, i en realitat no representen la culminació sinó l'inici de l'interès renovat per la dispersió Møller. Al setembre del 1950 un dels autors de l'article, Lorne Albert Page, va defensar la seva tesi doctoral: *A measurement of electron-electron scattering*. Els seus resultats no diferien essencialment dels que van ser publicats quatre anys després. És interessant constatar d'aquesta manera, que la relació entre els dos períodes que hem estat considerant és més estreta del que l'esment de l'any 1954 com a data de la comprovació definitiva suggereix. Els experiments de Page no només confirmaven experimentalment la fórmula de Møller; Page afirmava complagut a les seves conclusions que "*there is however some further satisfaction in noting that the formula is rather 'necessary', in that all the the essential features of the formula must*

be included for a reasonable agreement with experiment—thus it is not merely some degenerate form which applies for the range of E [incident energy] and ν [fractional energy transfer] investigated here".¹²

REFERÈNCIES

ASHKIN, A.; PAGE, L.; WOODWARD, W.M. (1954) "Electron-electron and positron-electron scattering measurements", *Phys. Rev.* 94, abril, pp. 357-362.

BARBER, W.C.; BECKER, C.E.; CHU, E.L. (1953) "Electron-electron scattering at 6.1 MeV", *Phys. Rev.* 89, pp. 950-957.

BARKAS, W.H.; DEUTSCH, R.W.; GILBERT, F. C.; VIOLET, C.E. (1952) "High energy electron-electron scattering", *Phys. Rev.* 86, pp. 59-63.

BETHE, H. (1930) "Zur Theorie des Durchgangsschneller Korpuskularstrahlen durch Materie", *Ann. Physik (5)* 5, pp. 325-400.

BETHE, H.; FERMI, E. (1932) "Über die Wechselwirkung von zwei Elektronen", *Zs. Phys.* 77, pp. 296-306.

BORN, M. (1926) "Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge", *Zs. Phys.* 37, pp. 863-877.

BREIT, G. (1929) "The effect of retardation on the interaction of two electrons", *Phys. Rev.* 34, 15 agost, pp. 553-573.

--- (1932) "Quantum theory of dispersion. Parts I-V", *Rev. Mod. Phys.* 4, juliol, pp. 504-576.

--- (1933) "Quantum theory of dispersion. Parts VI and VII", *Rev. Mod. Phys.* 5, abril, pp. 91-140.

CHAMPION, F.C. (1932a) "On some close collisions of fast β -particles with electrons, photographed by the expansion method", *Proc. Roy. Soc. A* 136, pp.

¹² PAGE (1950), tesi doctoral no publicada, p. 20.

630-637.

--- (1932b) "The scattering of fast β -particles by electrons", *Proc. Roy. Soc. A* 137, pp. 688-695.

DIRAC, P.A.M. (1928a) "The quantum theory of the electron", *Proc. Roy. Soc. A* 117, pp. 610-624.

--- (1928b) "The quantum theory of the electron, part II", *Proc. Roy. Soc. A* 118, pp. 351-361.

--- (1932) "Relativistic Quantum Mechanics", *Proc. Roy. Soc. A* 136, pp. 453-464.

FERMI, E. (1932) "Quantum theory of radiation", *Rev. Mod. Phys.* 4, pp. 87-132.

GROETZINGER, G.; LEDER, L.B.; RIBE, F.L.; BERGER, M.J. (1950) "Study of electron-electron scattering", *Phys. Rev.* 79, pp. 454-458.

HEISENBERG, W.; PAULI, W. (1929) "Zur Quantendynamik der Wellenfelder", *Zs. Phys.* 56, pp. 1-61.

--- (1930) "Zur Quantentheorie der Wellenfelder II", *Zs. Phys.* 59, pp. 168-190.

HEITLER, W. (1936) *The quantum theory of radiation*. Oxford University Press (1944, 1954).

HENDRY, J. ed. (1984) *Cambridge physics in the thirties*. Adam Hilger, Bristol.

HORNBECK, G.; HOWELL, I. (1941) "Production of secondary electrons by electrons of energy between 0.7 and 2.6 MeV", *Proc. Amer. Phil. Soc.* 84, abril, pp. 33-51.

ITZYKSON, C.; ZUBER, J. (1985) *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill.

JAMMER, M. (1966) *The conceptual development of quantum mechanics*. McGraw Hill.

JAUCH, J.M.; ROHRLIFELD, L. (1931) "Bemerkung zur khotons and Electrons. Addison-Wesley.

KÄLLÉN, A.O.G. (1958) "Quantenelektrodynamik", en Flügge S. ed. *Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik*, vol. V, part 1. Springer.

KLEIN, O. (1927) "Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips", *Zs. Phys.* 41, pp. 407-442.

KRAGH, H. (1981) "The genesis of Dirac's relativistic theory of electrons", *Arch. Hist. Ex. Sci.* 24, pp. 31-67.

--- (1990) *Dirac: A scientific biography*. Cambridge University Press, Cambridge.

KRAMERS, H.A. (1938) "Quantentheorie des Elektrons und der Strahlung", dins *Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

MØLLER, C. (1929) "Der Vorgang des radioaktiven Zerfalls unter Berücksichtigung der Relativitätstheorie", *Zs. Phys.* 55, pp. 451-466.

--- (1930a) "Zur Theorie der anomalen Zerstreung von α -Teilchen beim Durchgang durch leichtere Elemente", *Zs. Phys.* 62, pp. 54-70.

--- (1930b) "über die höheren Näherungen der Bornschen Stossmethode", *Zs. Phys.* 66, pp. 513-532.

--- (1931) "über den Stoß zweier Teilchen unter Berücksichtigung der Retardation der Kräfte", *Zs. Phys.* 70, pp. 786-795.

--- (1932) "Zur Theorie des Durchgangs schneller Elektronen durch Materie", *Ann. Physik* 14, pp. 531-585.

OPPENHEIMER, J.R.; CARLSON, J.F. (1932) "The impacts of fast electrons and magnetic neutrons", *Phys. Rev.* 41, setembre, pp. 763-792.

PAGE, L.A. (1950) *A measurement of electron-electron scattering*. Tesi doctoral, Cornell University, setembre.

PAULI, W. (1933) "Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik", dins *Hdb. d. Phys.* XXIV/1 (2a. ed.), pp. 83-272. Springer, Berlín.

ROSENFELD, L. (1931) "Bemerkung zur korrespondenzmässigen Behandlung des relativistischen Mehrkörperproblems", *Zs. Phys.* 71, pp. 253-259.

RUTHERFORD, E.; CHADWICK, J.; ELLIS C.D. (1930) *Radiations from radioactive substances*. Cambridge University Press.

SCOTT, M.B.; HANSON, A.O.; LYMAN, E.M. (1951) "Electron-electron scattering at 15.7 MeV", *Phys. Rev.* 84, novembre, pp. 638-643.

SHEARIN, P.E.; PARDUE, T.E. (1942) "Electron-electron collisions in the primary energy range from 1.3 to 2.6 million electronvolts", *Proc. Amer. Phil. Soc.* 85, febrer, pp. 243-249.

WENTZEL, G. (1943) *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder*. Frank Deuticke, Viena; traducció anglesa: *Quantum Theory of Fields*. Interscience Publishers, Nova York.